Linéarisation, exemples et contre-exemples.

Vincent Perrollaz

LMPT, Université François Rabelais, Tours

Journée Cascimodot, 22 Juin 2017

Outline

1. Historique
2. Problématique
3. Cas 1d
   - Premier exemple
   - Exemple plus lourd
4. Cas 2d
   - Linéaire
   - Linéarisation

Problème original

Maxwell (1868) "On governors" : Analyse du régulateur de Watt (parmi bien d'autres).

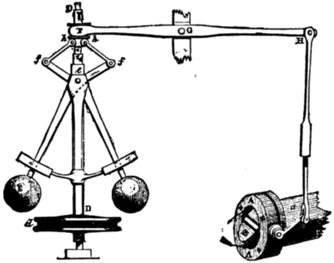
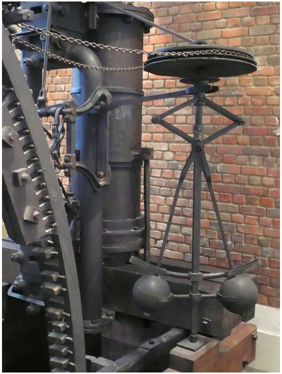


FIG. 4.—*Governor and Throttle-Valve.*



Les équations

- Modèle : Ω vitesse de rotation, ϕ angle de déflection

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi \\ \dot{\psi} = c^2\Omega^2 \sin(\phi)\cos(\phi) - \frac{g}{l}\sin(\phi) - \frac{b}{m}\phi \\ \dot{\Omega} = \frac{\mu\cos(\phi) - F}{I} \end{cases} \tag{1}$$

- Question : l'équilibre $(\phi_c, 0, \Omega_c)$ est-il asymptotiquement stable?
- Methodologie : Linéarisation et localisation des racines (Routh-Hurwitz).

Enoncé du problème.

Pour

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f(x_e) = 0 \end{cases}$$

Que peut-on déduire des propriétés de

$$\dot{X} = f'(x_e)X,$$

sur le système original.

- Si 0 est stable pour X, x_e l'est-il pour x?
- Si on connait la vitesse à laquelle $X(t) \to 0$, peut-on trouver celle à laquelle $x(t) \to x_e$?
- A-t-on un changement d'inconnues?

$$X(t) = g(x(t)) \Leftrightarrow x(t) = h(X(t))$$

  Car alors

$$x(t) = h(0) + h'(0)X(t) + o(X(t)).$$

1. Historique
2. Problématique
3. Cas 1d
   - Premier exemple
   - Exemple plus lourd
4. Cas 2d
   - Linéaire
   - Linéarisation

Premier exemple

- Pour l'équation différentielle non linéaire

$$\dot{x} = -x + x^2.$$

  $x_e = 0$ est un équilibre.

- On veut se ramener à l'équation linéarisée

$$\dot{X} = -X.$$

- Changement d'inconnue :

$$X = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

- Déterminer les coefficients $(a_i)_{i \geq 0}$.

Equations pour les coefficients

- Pour $\dot{X}$

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a_1\dot{x} + 2a_2x\dot{x} + 3a_3x^2\dot{x} + 4a_4x^3\dot{x} + \ldots \\ &= a_1(-x+x^2) + 2a_2x(-x+x^2) + 3a_3x^2(-x+x^2) + 4a_4x^3(-x+x^2) + \ldots \\ &= -a_1x + (2a_2 - a_1)x^2 + (2a_2 - 3a_3)x^3 + \ldots\end{aligned}$$

- Mais

$$-X = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 \ldots$$

- En identifiant

$$\begin{cases} -a_0 = 0 \\ -a_1 = -a_1 \\ -a_2 = 2a_2 - a_1 \\ -a_3 = 3a_3 - 2a_2 \\ \ldots \end{cases}$$

Changement d'inconnues

- On en déduit

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots$$

- Et donc

$$X = a_1(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots) = \frac{a_1 x}{1 - x}$$

- Or on vérifie alors

$$\dot{X} = a_1 \frac{\dot{x}(1-x) - x(-\dot{x})}{(1-x)^2} = a_1 \frac{-x + x^2}{(1-x)^2} = -a_1 \frac{x}{1-x} = -X.$$

- Inversion en

$$x = \frac{X}{a_1 + X}.$$

Exemple plus compliqué

- Pour l'équation différentielle non linéaire

$$\dot{x} = -\frac{x}{1-x}.$$

$x_e = 0$ est un équilibre.

- On veut se ramener à l'équation linéarisée

$$\dot{X} = -X.$$

- Changement d'inconnue :

$$X = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

- Déterminer les coefficients $(a_i)_{i \geq 0}$.
- Utilisation de

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Equations pour les coefficients

- Pour $\dot{X}$

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a_1\dot{x} + 2a_2x\dot{x} + 3a_3x^2\dot{x} + 4a_4x^3\dot{x} + \dots \\ &= a_1(-x - x^2 - x^3 - \dots) + 2a_2x(-x - x^2 - x^3 - \dots) \\ &\quad + 3a_3x^2(-x - x^2 - x^3 - \dots) + 4a_4x^3(-x - x^2 - x^3 - \dots) + \dots \\ &= -a_1x - (a_1 + 2a_2)x^2 - (a_1 + 2a_2 + 3a_3)x^3 + \dots\end{aligned}$$

- Mais

$$-X = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3\dots$$

- En identifiant

$$\begin{cases} -a_0 = 0 \\ -a_1 = -a_1 \\ -a_2 = -(a_1 + 2a_2) \\ -a_3 = -(a_1 + 2a_2 + 3a_3) \\ \dots \end{cases}$$

Changement d'inconnues

- On en déduit

$$a_0 = 0, \qquad a_n = a_1 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

- Et donc

$$X = a_1(x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2\times 3} + \frac{x^5}{2\times 3\times 4} = a_1 x e^{-x}$$

- Or on vérifie alors

$$\dot{X} = a_1 \frac{\dot{x}(1-x) - x(-\dot{x})}{(1-x)^2} = a_1 \frac{-x + x^2}{(1-x)^2} = -a_1 \frac{x}{1-x} = -X.$$

- Inversion en

$$x = \frac{X}{a_1 + X}.$$

Résumé

- Pour un système linéaire

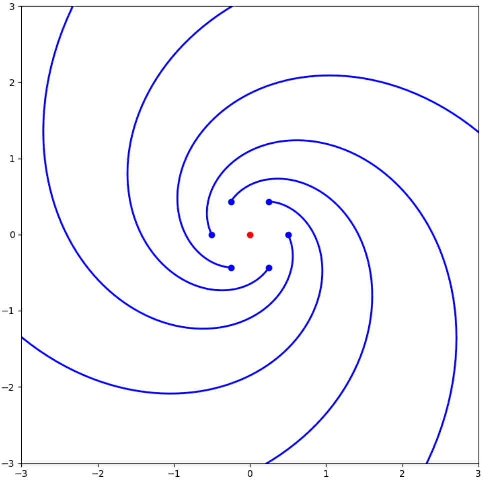
$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

- Asymptotique via problÃČme alg'ebrique : trouver les complexes λ tel que

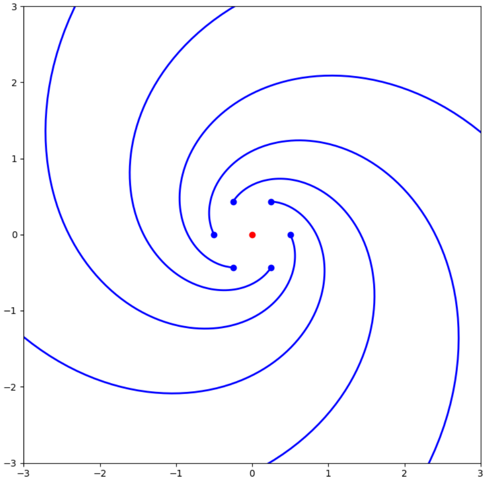
$$\begin{cases} au + bv = \lambda u \\ cu + dv = \lambda v \end{cases}$$

ait des solutions non nulles.

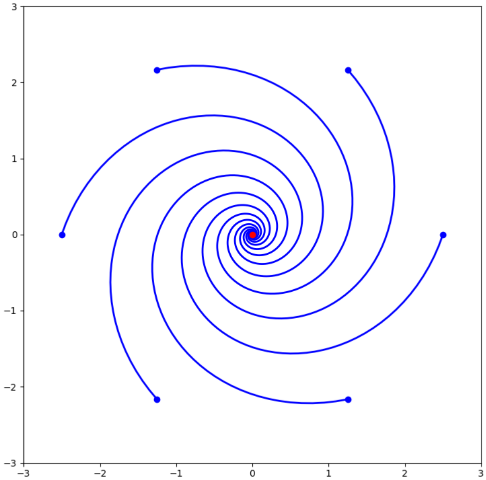
$\lambda = 1 + 2i,\ 1 - 2i$



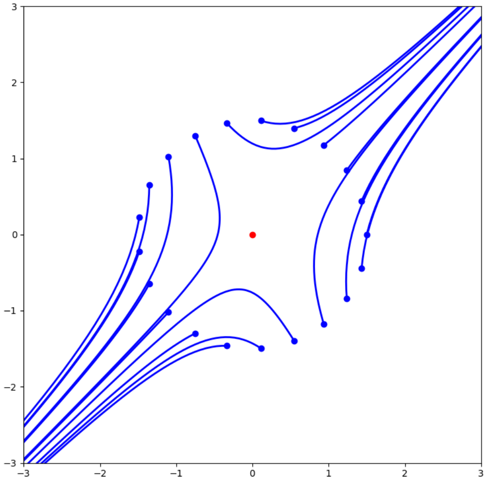
$\lambda = 1 + 2i,\ 1 - 2i$



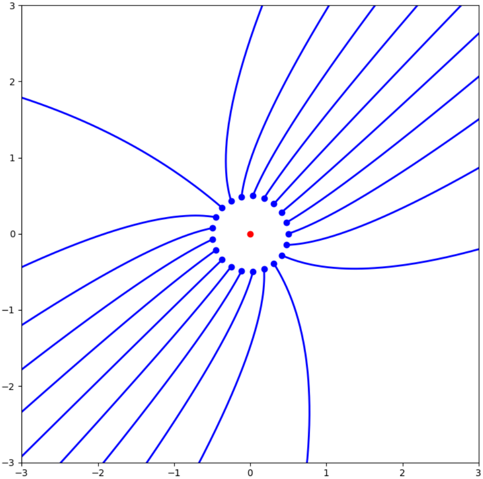
$\lambda = -1 + 3i, \; -1 - 3i$



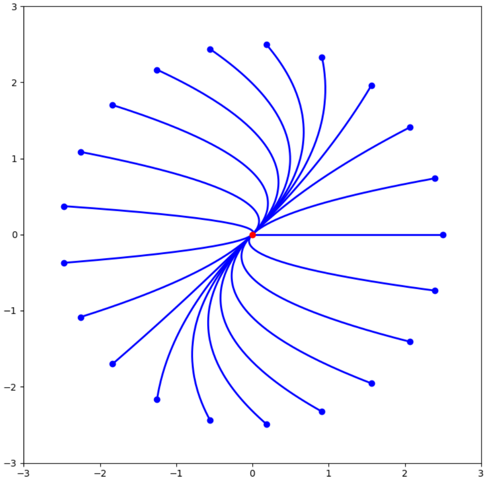
$\lambda = -3,\ 3$



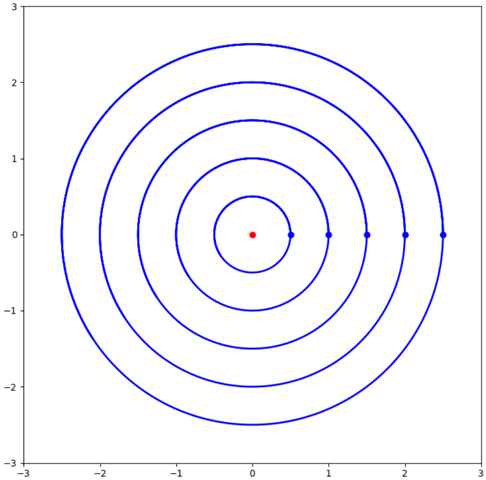
$\lambda = 1,\ 2$



$\lambda = -1, \ -2$



$\lambda = i, \ -i$



Résonnance

- Linéarisé asymptotiquement stable $\Rightarrow$ non-linéaire asymptotiquement stable.
- Mais par contre changement de variable **juste continu**!
- Problème de résonnance.
- Système original :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x \\ \dot{y} = -2\lambda y + x^2 \end{cases}$$

- Linéarisé :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\lambda X \\ \dot{Y} = -2\lambda Y \end{cases}$$

- Or

$$X(t) = X_0 e^{-\lambda t}, \quad Y(t) = Y_0 e^{-2\lambda t}, \quad x(t) = x_0 e^{-\lambda t}, \quad y(t) = (y_0 + t x_0^2) e^{-2\lambda t}.$$

- Mais si $y(t) = F(X(t), Y(t))$ alors

$$y(t) = X_0 e^{-\lambda t} \partial_X F(0,0) + X_0^2 e^{-2\lambda t} \partial^2_{XX} F(0,0) + Y_0 e^{-2\lambda t} \partial_Y F(0,0) + o(e^{-2\lambda t}),$$

Asymptotiques incompatibles : pas de te^{-2t}.

Critère algébrique de résonnance

- Changement de variable :

$$\begin{cases} X = \sum_{k,n\geq 0} a_{k,n} x^k y^n \\ Y = \sum_{k,n\geq 0} b_{k,n} x^k y^n \end{cases}$$

- Même méthode $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum_{k,n\geq 0} (\lambda k + 2\lambda n - \lambda) a_{k,n} x^k y^n = \sum_{k\geq 2,n\geq 0} (n+1) a_{k-2,n+1} x^k y^n \\ \sum_{k,n\geq 0} (\lambda k + 2\lambda n - 2\lambda) b_{k,n} x^k y^n = \sum_{k\geq 2,n\geq 0} (n+1) b_{k-2,n+1} x^k y^n \end{cases}$$

- En particulier avec $(k,n) = (0,1), (1,0)$ et $(2,0)$

$$a_{0,1} = 0, \qquad -b_{1,0} = 0, \qquad 0 = b_{0,1}$$

$\Rightarrow (X, Y) \mapsto (x, y)$ non dérivable.

Morale

- Pour un linéarisé tel que

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

  si

$$\lambda \text{ valeur propre } \Rightarrow \Re(\lambda) \neq 0$$

  alors non linéaire topologiquement équivalent au non-linéaire.

- Si de plus les valeurs propres (qu'on appelle $\lambda_1, ...\lambda_n$) vérifient

$$p_1\lambda_1 + ... + p_n\lambda_n = 0 \Rightarrow p_1 = ... = p_n = 0,$$

  alors non linéaire différentiablemet équivalent au non-linéaire.

- En cas de résonnance tout dépend de la non-linéarité.
- Question plus générale : si la partie "principale" est stable que dire pour le système complet?

Merci pour votre attention